ماتریسها

ماتریس، آرایشی از اعداد حقیقی است که روی سطرها و ستون های منظم قرار گرفته و با دو کروشه محصور شده باشند.

ردیف ها[1] یا سطرهای ماتریس را با حرف (R) و ستونهای[2] ماتریس را با حرف (C) نشان می دهند. در هر ماتریس تعداد ردیف ها را اول و تعداد ستون ها را دوم می نویسند و بصورت حاصل ضرب ($R \times C$) نمایش می دهند. هر ماتریس متشکل از یک یا چند عدد است که آنها را اعضا یا عناصر و یا درایه های ماتریس می نامند. به طور مثال ماتریسی نظیر (A) را در نظر بگیرید که یک ماتریس 2×3 می باشد.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

در یک ماتریس هر عنصر را با شماره ردیف و ستون آن می شناسند. شماره ردیف و ستون هر عنصر بصورت اندیس(زیروند) و با حرف (i) که نمایانگر شماره ردیف و حرف (j) که نشانگر شماره ستون است نشان داده می شود(a_{ij}). بطور مثال در ماتریس فوق (A)، a_{11} یعنی عنصر(درایه) ردیف اول و ستون اول، a_{12} بیانگر عنصر ردیف اول و ستون دوم و a_{32} گویای عنصر ردیف سوم و ستون دوم است. به همین ترتیب سایر عناصر نیز دارای موقعیت مشخصی در ماتریس هستند.

اگر در یک ماتریس تعداد سطرها برابر با تعداد ستون ها باشد، ماتریس را یک ماتریس مربع[3] گویند. ماتریس مربع زیر را در نظر بگیرید:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

هر ماتریس دارای یک قطر اصلی و یک قطر فرعی است. منظور از قطر اصلی مجموعه ای از عناصر است که از بالاترین گوشه چپ ماتریس شروع می شوند و به پایین ترین گوشه راست ماتریس ختم می شوند. قطر فرعی ماتریس جموعه ای از عناصر است که بالاترین گوشه سمت راست شروع می شوند و به پایین ترین گوشه سمت راست ختم می شوند. در یک ماتریس مربع، اگر عناصر بالای قطر اصلی مشابه عتاصر زیر قطر اصلی باشند، ماتریس را یک ماتریس متقارن[4] گویند. از

1. Rows
2. Columns
3. Square matrix
4. Symmetric matrix

ماتریسهای متقارن می توان به ماتریس واریاسن- کواریانس و ماتریس همبستگی اشاره کرد. در ماتریس واریانس- کواریانس، قطر اصلی عبارت است از واریانس متغیرها و عناصر بالای(زیر) قطر اصلی همان کواریانس بین متغیرهاست. به عنوان مثال ماتریس زیر یک ماتریس متقارن واریانس-کواریانس بین سه متغیر x, y, z می باشد. در این ماتریس، قطر اصلی واریانس بین متغیرها و عناصر بالای قطر اصلی کواریانس بین متغیرهاست.

$$R = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x & \quad y & \quad z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{bmatrix} \mathrm{var}(x) & \mathrm{cov}(xy) & \mathrm{cov}(xz) \\ & \mathrm{var}(y) & \mathrm{cov}(yz) \\ & & \mathrm{var}(z) \end{bmatrix} \end{array}$$

بردار ستونی[۵] یک ستون از اعداد است که شامل r ردیف و ۱ ستون است. به عنوان مثال بردار ستونی a یک ماتریس 3×1 است که شامل ۳ ردیف و ۱ ستون است، یعنی:

$$a = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

همچنین یک بردار ردیفی عبارت است از یک ردیف از اعداد به ابعاد $1 \times c$. به طور مثال خواهیم داشت:

$$a' = [5 \quad 1 \quad 6]$$

a' را برگردان(ترانهاده) بردار a می نامند.

اگر مقادیر روی قطر اصلی یک ماتریس غیر صفر و عناصر خارج از قطر اصلی صفر باشند ماتریس حاصل را یک ماتریس قطر نامند. برای مثال ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

یکی از شکلهای ویژه ماتریس قطر، ماتریس واحد می باشد که با I نشان می دهند. در این ماتریس و در روی قطر اصلی ماتریس عدد ۱ قرار دارد. این ماتریس کاربردهای متعددی از جمله در آمار چند متغیره دارد و شکل زیر است:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Column vector

عملیات ماتریس

عملیات آماری متعددی می توان روی ماتریسها انجام داد کـه مهمتـرین ایـن عملیـات عبارتنـد از جمع، تفریق، ضرب و عکس ماتربس. در ادامه با ذکر مثالی از هر کدام از عملیات مذکور، به توضیح آنها پرداخته می شود.

۱- **جمع و تفریق**[۶]: دو یا چند ماتریس را در صورتی می توان با هم جمع و یا از هم تفریق کرد که دارای ابعاد یکسان باشند یعنی تعداد عناصر(درایه های) آنها برابـر باشـند. دو مـاتریس A و B بـه ابعاد 3×3 زیر را در نظر بگیرید که حاصل برداری است نظیر بردار C یعنی:

$$A+B = C$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 10 & 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 8 \\ 17 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

حال بردار B را از بردار A کم می کنیم:

$$A - B = C$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 10 & 5 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 \\ -4 & -8 & -8 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

۲- **ضرب**[۷]: حاصل ضرب یک بردار ردیفی در یک بردار ستونی عددی است که آن را نرده[۸] گوینـد. به همین دلیل است که حاصل ضرب یک ردیف در یک سـتون را حاصـل ضـرب نـرده ای بردارهـا گویند. برای به دست آوردن حاصل ضرب یک بردار ردیفی در یک بردار ستونی، درایه های هر یک را در دیگری ضرب می کنیم و سپس با هم جمع می کنیم. به طور مثال، حاصل ضرب بردار ردیفی A در بردار ستونی B به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

به عنوان مثال، ماتریس های زیر مفروض هست. خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (2)(4) + (3)(1) + (1)(0) = 11$$

همان طور که ملاحظه گردید از حاصل ضرب یک بردار ردیفی در یک بردار ستونی یک عدد (نرده)

1. Addition and subtraction
2. Multiplication
3. Scalar

حاصل می شود. از این ویژگی می توان برای به دست آوردن مجموع عناصر (درایه های) یک بردار ستونی استفاده کرد. بدین منظور، بردار ستونی مورد نظر را در یک بردار ردیفی واحد و با همان ابعاد پیش ضرب (بردار واحد ضربدر بردار ستونی) می کنیم. بدین منظور خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = (1)(4) + (1)(1) + (1)(2) = 7$$

به همین ترتیب مجذور یک ماتریس از طریق پیش ضرب برگردان آن (بردار ردیفی آن ماتریس) در آن بردار حاصل می شود:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = (4)(4) + (1)(1) + (2)(2) = 21$$

همانطور که مشاهده گردید در هر صورت از حاصل ضرب یک بردار ردیفی در یک بردار ستونی یک عدد (اسکالر) حاصل می شود. اما اگر یک بردار ستونی در یک بردار ردیفی ضرب شود نتیجه کاملاً متفاوت بوده و حاصل بصورت یک ماتریس خواهد بود. ماتریس حاصل، ماتریسی است که تعداد ردیف های آن برابر با تعداد ردیف های ماتریس اول و تعداد ستون ها ی آن برابر با تعداد ستون های ماتریس دوم می باشد. دو ماتریس زیر مفروض است؛ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -20 & -12 \\ 6 & -5 & -3 \\ 12 & -10 & -3 \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می شود، هر درایه ستون به ترتیب در هر عنصر ردیف ضرب می شود تا یک عنصر از ماتریس جدید به دست آید. حاصل ضرب اولین عنصر ستون (عدد ۴) در عناصر ردیف سبب به وجود آمدن اولین ردیف ماتریس جدید می شود. به همین ترتیب حاصل ضرب دومین عنصر ستون (عدد ۱) در عناصر ردیف باعث ایجاد عناصر ردیف دوم ماتریس جدید می شود و الی آخر. بنابراین همانطور که نشان داده شد از حاصل ضرب یک ماتریس $m \times 1$ در $1 \times n$ ماتریسی به ابعاد $m \times n$ به دست می آید. از این اصل و اصلی که در مورد حاصل ضرب ماتریس ردیفی در ستونی که در بالا بدان اشاره گردید برای ضرب ماتریسهای چند بعدی بهره گرفته می شود. به مثال زیر توجه کنید:

$$\begin{bmatrix}4 & 5\\1 & 4\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\3 & 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(4\times 2)+(5\times 3) & (4\times 1)+(5\times 5) & (4\times 2)+(5\times 6)\\(1\times 2)+(4\times 3) & (1\times 1)+(4\times 5) & (1\times 2)+(4\times 6)\\(2\times 2)+(1\times 3) & (2\times 1)+(1\times 5) & (2\times 2)+(1\times 6)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}23 & 29 & 38\\14 & 21 & 26\\7 & 7 & 10\end{bmatrix}$$

شرط اینکه بتوان دو ماتریس چند بعدی را در یکدیگر ضرب کرد بایستی تعداد ستون های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشند. این شرط را شرط توافق یا سازگاری می نامند. به عبارت دیگر، یک ماتریس به ابعاد $m \times n$ را می توان در یک ماتریس $n \times p$ ضرب کرد زیرا که تعداد ستون های اولی با تعداد ردیف های دومی برابر هستند. به همین خاطر، n ها را ابعاد درونی[۹]، و m و p را ابعاد بیرونی[۱۰] ماتریس گویند. با این اوصاف میتوان گفت که دو ماتریس وقتی سازگار هستند که دارای ابعاد درونی یکسان باشند؛ ولی محدودیتی برای ابعاد بیرونی ماتریس ها وجود ندارد. ماتریس حاصل از حاصل ضرب دو ماتریس فوق، ماتریسی است که تعداد ردیف های آن برابر با تعداد ردیف های ماتریس اول و تعداد ستون های آن برابر با تعداد ستون های ماتریس دوم خواهد بود به عبارت دیگر ابعاد خارجی یا بیرونی دو ماتریسی که درهم ضرب می شوند همان ابعاد ماتریس حاصل خواهد شد یعنی:

$$(m \times n)(n \times p) = (m \times p)$$

برای ضرب یک عدد (اسکالر) در یک ماتریس، کلیه عناصر ماتریس در عدد ضرب می شوند. بطور مثال داریم:

$$5\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\3 & 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10 & 5 & 10\\15 & 25 & 30\end{bmatrix}$$

دترمینان- دترمینان یک مقدار عددی ویزه مربوط به یک ماتریس مربع است. دترمینان بیشتر برای تعیین معکوس ماتریسها استفاده می شود، به طوری که اگر دترمینان ماتریسی مخالف صفر باشد، آنگاه آن ماتریس معکوس پذیر است. از این رو از طریق دترمینان می توان مقادیر ویژه یک ماتریس را تعیین کرد. مفهوم دترمینان فقط برای ماتریسهای مربعی یعنی ماتریس هایی که تعداد سطر و ستون آن ها با هم برابر است تعریف شده است. مثلاً دترمینان ماتریسهای ۱×۱ ، ۲×۲ ، ۳×۳ و .... دترمینان ماتریس A را با نمادهای $|A|$ یا $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ یا det(A) نمایش می دهند.

---

1. Interior dimensions
2. Exterior dimensions

دترمینان ماتریس مربع مرتبه اول: این دترمینان بصورت $|A| = [a_{11}] = a$ تعریف می شود.
دترمینان یک ماتریس مربعی 2×2 برابر حاصلضرب عناصر قطر اصلی منهای حاصلضرب عناصر قطر فرعی است. برای ماتریس A خواهیم داشت:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det A}=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (4) \times (2) - (5) \times (1) = 3$$

یکی ازکاربردهای مهم دترمینان در ماتریس همبستگی و همچنین در تحلیل های آماری چند متغیره از قبیل تحلیل مولفه های اصلی و تحلیل عاملی است. در یک ماتریس همبستگی، هر چقدر د ترمینان ماتریس کمتر باشد و یا به عبارت دیگر به سمت صفر میل کند، نشانگر بالا بودن همبستگی بین متغیرها است. همچنین در تحلیل مولفه های اصلی و تحلیل عامی، کمتر و یا صفر بودن دترمینان نشان از همبستگی بالای بین متغیرها و نیز مناسب بودن تحلیل می باشد.
دترمینان یک ماتریس مربعی درجه سوم(3×3) را می توان به عنوان یک تابع خطی از سه دترمینان مربعی(2×2) درجه دوم بسط داده و محاسبه کرد. برای تعریف دترمینان ماتریس مرتبه سوم (و بالاتر) نیاز به تعریف دو مفهوم داریم: کهاد(ماینور)[1] و همسازه(کوفاکتور)[2]. فرض کنید $A = [a_{11}]$ ماتریس n×n باشد. ماتریسی را که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A بدست می آید با M_{ij} نشان می دهیم. دترمینان M_{ij} یعنی $|M_{ij}|$ را کهاد یا مینور a_{ij} می نامند.
بطور مثال ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 9 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. ماینور(M_{11}) برای کوفاکتور a_{11} به قرار زیر است.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (9 \times 4) - (2 \times 3) = 36 - 6 = 30$$

کوفاکتور(Δ_{ij}) ماتریس بصورت زیر تعریف می شود:

$$\Delta_{ij}= Cofactor\ (a_{ij}) = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

کوفاکتور a_{12} عبارت است از:

$$\Delta_{12}= Cofactor\ (a_{12}) = (-1)^{1+2}|M_{ij}| = -(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})$$

ماتریس مربعی درجه سوم زیر را در نظر بگیرید. دترمینان ماتریس عبارت خواهد بود:

---
1. Minor
2. Cofactor

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

برای مثال، ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 9 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ مفروض است. دترمینان این ماتریس بصورت زیر محاسبه می شود:

$$\det A = 2 \times (-1)^2 \times \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 5 \times (-1)^3 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 8 \times (-1)^4 \times \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det A = |A| = 2(36-6) - 5(4-12) + 8(2-36)$$

$$|A| = 60 + 40 - 272 = -172$$

برخی از ویژگیهای دترمینان عبارتند از:

۱- اگر ماتریس A دارای دو سطر یادو ستون مساوی باشد، دترمینان آن ماتریس صفر است.

۲- اگر ماتریس A دارای سطر یا ستونی با درایه های صفر باشد، دترمینان آن صفر است.

۳- اگر B ماتریس حاصل از جابجایی دو سطر و یا دو ستون ماتریس A باشد، آنگاه دترمینان B برابر قرینه دترمینان A است.

۴- اگر ماتریس A یک ماتریس بالا مثلثی[۱۳] و یا پایین مثلثی باشد، دترمینان آن برابر است با ضرب درایه های قطر اصلی.

۵- اگر تمام درایه های ماتریس A بر عددی مانند K بخش پذیر باشد آنگاه K از دترمینان خارج میشود و در عدد دترمینان ضرب می شود.

۳- تقسیم: برای تقسیم یک عدد بر عدد دیگر می توان یکی از اعداد را در عکس عدد دیگر ضرب کرد. بطور مثال برای تقسیم عددی مثل m بر عددی مانند n، می توان m را در معکوس n ضرب کرد، یعنی:

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{n}m$$

به همین ترتیب درجبر ماتریس ها، به جای تقسیم ماتریس M بر ماتریس N، ماتریس M را در

۱. ماتریس مثلثی گونه خاصی از ماتریس مربعی است. ماتریسی که کلیه اعضای زیر قطر اصلی آن صفر باشد را ماتریس بالا مثلثی و ماتریسی که کلیه اعضای بالای قطر اصلی آن برابر صفر باشد را ماتریس پایین مثلثی گویند. از ویژگیهای این نوع ماتریس این است که برای محاسبه دترمینان آن، کافیست اعضای قطر اصلی را در هم ضرب کنیم. در نتیجه مثلثی کردن ماتریس یکی از روش های سریع تر برای دترمینان گرفتن از ماتریس های بزرگ است.

عکس ماتریس N ضرب می کنیم تا ماتریس O حاصل شود. برای تقسیم یک ماتریس مربعی بر ماتریس مربعی دیگر، ابتدا باید مفهوم شکل دهی[۱۴] ماتریس را توضیح دهیم. شکل دهی یک ماتریس را با adj نمایش می دهند و بصورت زیر حساب می کنند.

$$N = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$adj\ N = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می شود، برای شکل دهی یک ماتریس 2×2، جای عناصر روی قطر اصلی را عوض می کنیم و علامت عناصر قطر فرعی را تغییر می دهیم. بنابراین عکس ماتریس N بصورت زیر خواهد بود:

$$N^{-1} = \frac{adj\ \ N}{|N|} = \frac{1}{|N|}\ adj\ N$$

در رابطه فوق، $|N|$ دترمینان ماتریس N و $adj\ N$ شکل دهی ماتریس N است. بطور مثال دو ماتریس M و N بصورت زیر می باشند. ابتدا دترمینان و شکل دهی ماتریس N را حساب کرده و در نهایت حاصل تقسیم ماتریس M بر ماتریس N را حساب می کنیم.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad\qquad N = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\det N = |N| = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = (4) \times (2) - (5) \times (1) = 3$$
$$\text{adj}\, N = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

لازم به توضح است که برای تقسیم ماتریس M بر ماتریس N، معکوس ماتریس N پیش ضرب ماتریس M می شود. در نتیجه خواهیم داشت:

$$N^{-1} = \frac{1}{|N|}\ adj\ N = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.67 & -0.33 \\ -1.67 & 1.33 \end{bmatrix}$$
$$N^{-1}M = \begin{bmatrix} 0.67 & -0.33 \\ -1.67 & 1.33 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.01 & 0.69 \\ -2.01 & 0.31 \end{bmatrix}$$

۵- مقادیر ویژه[۱۵] و بردارهای ویژه[۱۶]

فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد و نیز معادله برداری $AX = \lambda X$ را داشته باشیم، که در آن λ یک عدد اسکالر است. مقداری از λ را که به ازای آن معادله برداری $AX = \lambda X$ دارای جوابی غیر صفر برای X یعنی($X \neq 0$) باشد، مقدار ویژه(مقدار خاص) ماتریس A گویند و بردار

1. Adjoint
1. Eigen values
2. Eigen vectors

X بردار ویژه(خاص) ماتریس A متناظر با آن مقدار ویژه می باشد. طبـق تعریـف بردارهـای ویـژه ماتریس مربعی A با ابعاد $n \times n$، برداری است مانند V بطوری که داشته باشیم:

$$AV = \lambda V$$

در معادله برداری فوق، λ مقدار ویژه و V بردار ویژه می باشد. همانطور که از معادله بـرداری فـوق مشاهده می شود، اگر بردار V دارای مختصات $V = [X_1, \quad X_2, \dots, \quad X_n]$ باشد و I مـاتریس واحد به ابعاد $n \times n$، در نتیجه خواهیم داشت:

$$(A-\lambda I)V = 0 \implies \begin{cases} (a_{11}-\lambda)X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = 0 \\ a_{21}X_1 + (a_{22}-\lambda)X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_1 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)X_n = 0 \end{cases}$$

همان گونه که مشاهده می شود، یک دستگاه n معادله n مجهولی داریم که اگر بخواهیم بـرای X جواب غیر صفر بدست آوریم بایستی دترمینان دستگاه را حساب کنیم، یعنی:

$$det(A-\lambda I) = 0$$

از رابطه فوق یک چند جمله ای به دست می آید که آن را چند جملـه ای مشخصـه[17] مـی نامنـد. یعنی:

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + P_1\lambda^{n-1} + \cdots + P_n = det(A-\lambda I)$$

اگر $P_n(\lambda)$ داری n ریشه λ_1، λ_2، ... ، λ_n باشد، متناظر با هر یک از λ_i ، می توانیم V_i بردار ویژه به دست آوریم. در ادامه برای تفهیم مطلب، مثالی را ذکر می کنیم.

مطلوب است محاسبه چندجمله ای مشخصه، مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس زیر:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$det(\lambda I - A) = 0 \quad \Rightarrow \quad det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Rightarrow det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Rightarrow det\left(\begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -4 & \lambda-3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \big((\lambda-1)(\lambda-3) - (-4)(-2)\big) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - \lambda + 3 - 8 = 0$$

$$(\text{چندجمله ای مشخصه})\ P_n(\lambda) \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda-5)(\lambda+1) = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 5 \ , \lambda_2 = -1$$

1. Characteristic Polynomial

بنابراین طبق محاسبات فوق، مقادیر ویژه برای ماتریس A برابر با 5 و 1- به دست آمدند. بردارهای ویژه عبارتند از:

برای مقدار ویژه $\lambda_1 = 5$، بردار ویژه بصورت زیر است:

$$AV = \lambda V \Rightarrow \quad (A - \lambda I)V = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 5 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-5 & 2 \\ 4 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 4X - 2Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

و برای مقدار ویژه $\lambda_1 = -1$، بردار ویژه بصورت زیر خواهد بود:

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 4 & 3-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 2X + 2Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

انواع آدرس در یک ماتریس

انواع آدرس در یک ماتریس رکن اصلی یادگیری و نوشتن برنامه نویسی در متلب می‌باشد. به طوری که هنگام کار با متلب حتما باید یکی از این آدرس‌ها را بکار ببرید. ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ 9 & 5 & 3 & 6 & 9 & 1 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	

این ماتریس ۶ در ۶ می‌باشد یعنی از شش ردیف و شش ستون ($A_{6\times6}$) تشکیل شده است. حالا اگر بخواهیم زیر ماتریس از ماتریس A استخراج کنیم یا اشاره به بخش‌های از این ماتریس کرده باشیم حتما باید از آدرس‌ها استفاده کنیم. به این ترتیب آدرس‌ها به شکل زیر خواهند بود:

الف- **(: ،۱)** این آدرس اشاره به ردیف اول و همه ستون‌های ماتریس A دارد. بنابراین اشاره به قسمت زیر دارد:

$A(1,:) \rightarrow [1\ \ 2\ \ 1\ \ 3\ \ 2\ \ 4]$	

ب- **(:، ۱)** این دستور اشاره به ستون اول و همه ردیف‌های ماتریس A دارد.

	$A(:,1) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \\ 8 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

این دو دستور یعنی (: ،۱) و (۱ ،:) مهترین دستورهای می‌باشد که کاربرد فراوانی در برنامه‌نویسی در متلب دارند.

ج-**(۱:۵، ۲:۶)** این دستور اشاره به ردیف‌های اول تا پنجم و ستون دو تا شش ماتریس A دارد. در واقع این بخش از ماتریس:

	$A(1:5,2:6) \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 9 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

د-**(:، ۲:۶)** این دستور اشاره به همه ردیف‌ها ولی ستون دوم تا ششم دارد.

	$A(:,2:6) \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 9 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

ه-**(۱:۴،:)** این دستور اشاره به همه ستون‌ها ولی ردیف‌های ۱ تا ۴ و دارد. در واقع به این قسمت از ماتریس اشاره دارد:

	$A(1:4,:) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ 9 & 5 & 3 & 6 & 9 & 1 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

م-**(:،:)** این دستور اشاره به همه درایه‌ها (شامل سطر و ستون) یک ماتریس دارد در واقع همان

ماتریس A می‌باشد.

$A(:,:) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ 9 & 5 & 3 & 6 & 9 & 1 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	